Lời mở đầu..........................................................................................................................8 Một số ký hiệu...................................................................................................................10 Chương 1. Ma trận – Định thức……………………………………………….……………...12 1.1. Ma trận……………………………………………………………................12 1.1.1. Định nghĩa ma trận..............................................................................12 1.1.2. Ma trận bằng nhau...………………………………………………....12 1.1.3. Các ma trận đặc biệt...........................................................................13 1.1.4. Các phép toán trên ma trận……............................................................15 1.1.5. Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng........................................................18 1.2. Định thức……………………………………….……………………….......20 1.2.1. Định nghĩa định thức ma trận vuông cấp n………….…………………...20 1.2.2. Định lý khai triển định thức theo một hàng hay một cột bất kỳ.................21 1.2.3. Các tính chất định thức………..............................................................23 1.2.4. Định lý sự thay đổi của định thức qua các phép biến đổi………………...24 1.2.5. Phần bù đại số và ma trận phụ hợp…………………….………………...25 1.3. Ma trận nghịch đảo……………….…………….……………………….......26 1.3.1. Định nghĩa ma trận nghịch đảo………….………………….…………...26 1.3.2. Giải thuật tìm ma trận nghịch đảo..........................................................26 1.3.3. Định lý sự tồn tại của ma trận nghịch đảo...............................................28 1.3.4. Một số tính chất của ma trận nghịch đảo……………………………….. 28 1.4. Hạng ma trận…..……………….…………….………………………….......29 1.4.1. Định nghĩa tổng quát hạng của một ma trận….……………..…………...29 1.4.2. Tính chất.............................................................................................29 1.4.3. Phương pháp tìm hạng của ma trận........................................................29 1.4.4. Một số bất đẳng thức về hạng của ma trận............................................30 1.5. Bài tập……..…..……………….…………….………………………….......32 Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính……………………………………………………….39 3 2.1. Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính………………………………………....39 2.1.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính tổng quát………..………………39 2.1.2. Định nghĩa nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính………….……..40 2.1.3. Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác…………….………….……..40 2.1.4. Hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang………….………….……..41 2.1.5. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử ẩn Gauss.……..42 2.2. Hệ phương trình Cramer………………………………………………………….45 2.2.1. Định nghĩa hệ phương trình Cramer……………………….………..…..45 2.2.2. Các phương pháp giải hệ phương trình Cramer.......................................46 2.3. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.....................................................................47 2.3.1. Nhận xét về sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát...47 2.3.2. Định lý Kronecker – Capelli ..................................................................47 2.4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất…………………….…………………….50 2.4.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính thuần nhất..................................50 2.4.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất….…….…………..50 2.5. Một số bài toán ứng dụng trong kinh tế……….……………………………….....51 2.5.1. Mô hình cân bằng thị trường..................................................................51 2.5.2. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân…………………………..……...54 2.5.3. Mô hình input – output của Leontief…………………………………..58 2.6. Bài tập…………………………………………………………………………....64 Chương 3. Không gian vectơ.…………………………………………………………….......71 3.1. Các khái niệm căn bản…………………………………………………………71 3.1.1. Định nghĩa không gian vectơ….……………………………..………….71 3.1.2. Định nghĩa tổ hợp tuyến tính của các vectơ…………………...…………71 3.1.3. Định nghĩa không gian vectơ con của một không gian vectơ……………72 3.1.4. Định nghĩa không gian con sinh bởi một tổ hợp tuyến tính……………...72 3.1.5. Định nghĩa độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính…………………...73 3.2. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ…………………………………………..74 3.2.1. Định nghĩa cơ sở của một không gian vectơ….…………………………74 3.2.2. Ma trận chuyển cơ sở................................................................................74 3.2.3. Tính chất...................................................................................................75 3.2.4. Mệnh đề....................................................................................................76 4 3.3. Bài tập…………………………………………………………………..…...79 Chương 4. Phép tính vi phân hàm một biến…………………………….…………………….84 4.1. Giới hạn của dãy số thực………………………….……………………………....84 4.1.1. Định nghĩa dãy, giới hạn của dãy số thực……………..…………………84 4.1.2. Các tính chất và các định lý về giới hạn của dãy số thực….…….………84 4.1.3. Một số dãy số thực đặc biệt….……………………………….….………86 4.2. Hàm số một biến số…………………………..…………………………………..89 4.2.1. Các khái niệm cơ bản về hàm số…..……………………….……….…..89 4.2.2. Hàm số hợp...............................................................................................89 4.2.3. Hàm số ngược….…….……………………………………………...…..90 4.2.4. Các hàm số sơ cấp cơ bản..........................................................................90 4.2.5. Dáng điệu hàm số .....................................................................................92 4.2.6. Một số hàm trong kinh tế..........................................................................93 4.3. Giới hạn hàm số.....................................................................................................95 4.3.1. Các định nghĩa giới hạn..........................................................................95 4.3.2. Giới hạn của các hàm sơ cấp cơ bản.......................................................97 4.3.3. Các dạng vô định....................................................................................97 4.3.4. Các giới hạn cơ bản................................................................................98 4.4. Vô cùng bé và vô cùng lớn......................................................................................99 4.4.1. Định nghĩa.............................................................................................99 4.4.2. Các tính chất........................................................................................100 4.5. Hàm số liên tục…………………….………………………………….………...101 4.5.1. Định nghĩa về hàm số liên tục...............................................................101 4.5.2. Tính chất liên tục của hàm sơ cấp…….………………………………...102 4.5.3. Các phép toán của hàm liên tục tại một điểm.........................................103 4.6. Đạo hàm………………………………………..................................................103 4.6.1. Khái niệm về đạo hàm..........................................................................103 4.6.2. Bảng công thức các đạo hàm cơ bản….……………………………….106 4.6.3. Các quy tắc tính đạo hàm…………….……………………………….106 4.6.4. Đạo hàm hàm hợp………………….………………………………...107 4.6.5. Đạo hàm của hàm ngược………….………………………………….108 4.6.6. Đạo hàm một phía……………….………………………………...…108 5 4.6.7. Đạo hàm cấp cao………………….………………………………….109 4.7. Vi phân…….…………………………………...................................................110 4.7.1. Định nghĩa vi phân...............................................................................110 4.7.2. Sự liên hệ giữa vi phân và đạo hàm……….………………...…..……110 4.7.3. Tính bất biến của biểu thức vi phân cấp 1….…………………………111 4.7.4. Các quy tắc tính vi phân…………….………………………………..111 4.7.5. Vi phân cấp cao…………………….………………………………...111 4.8. Các định lý cơ bản về hàm số khả vi.…...............................................................112 4.8.1. Định lý Fermat ....................................................................................112 4.8.2. Định lý Rolle …………………..…….………………………………112 4.8.3. Định lý Lagrange…………………………………………………….112 4.8.4. Định lý Cauchy………………….…………………………………...113 4.9. Một số ứng dụng của đạo hàm và vi phân.……………………………….……..113 4.9.1. Khử dạng vô định 0 , 0 ∞ ∞ …...................................................................113 4.9.2. Tính gần đúng………….………..…………………………………...115 4.9.3. Khảo sát tính tăng, giảm và cực trị của hàm số….……………………115 4.9.4. Khai triển Taylor – Maclaurin………………….…………………….116 4.9.5. Ứng dụng trong bài toán kinh tế………………….………………..…119 4.10. Bài tập…….……………………………………………………..……………122 Chương 5. Tích phân…………………………….…………………………..……………...129 5.1. Tích phân bất định……………………….…………………………….………..129 5.1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định………….…..……………..……….129 5.1.2. Bảng công thức các tích phân cơ bản……….………………………….130 5.1.3. Các phương pháp tính tích phân bất định….……………….……..……130 5.2. Tích phân xác định………………..…………………………………………….137 5.2.1. Định nghĩa các tính chất của tích phân xác định….…….………...…...137 5.2.2. Các tính chất cơ bản của tích phân xác định..........................................140 5.2.3. Công thức NewTon – Leibnitz ………………….……………….....…140 5.2.4. Các phương pháp tính tích phân xác định..............................................141 5.2.5. Ứng dụng tích phân xác định..................................................................142 5.3. Tích phân suy rộng...............................................................................................144 6 5.3.1. Tích phân suy rộng loại 1: Định nghĩa và phương pháp tính.................144 5.3.2. Tích phân suy rộng loại 2: Định nghĩa và phương pháp tính................146 5.3.3. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng.............................................148 5.4. Bài tập…………………………………………………………..……..……….151 Chương 6. Phép tính vi phân hàm nhiều biến………………………………………………..156 6.1. Các khái niệm…………...………….…………………………………………...156 6.1.1. Hàm số hai biến số.......………………………………………………...156 6.1.2. Định nghĩa hàm n biến số…...……….…………………………………157 6.1.3. Hàm số hợp………………………………………..………….….…….158 6.1.4. Một số hàm trong kinh tế……….….…………………………………..158 6.2. Giới hạn và liên tục của hàm số……...…………………………...……………..161 6.2.1. Giới hạn của hàm nhiều biến số….…..……………………………...…161 6.2.2. Hàm số liên tục.......................................................................................163 6.3. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần.............................................................164 6.3.1. Đạo hàm riêng……..……………………………….............................164 6.3.2. Vi phân và ứng dụng vi phân để tính gần đúng.....................................171 6.4. Cực trị hàm nhiều biến.........................................................................................175 6.4.1. Cực trị tự do.........................................................................................175 6.4.2. Cực trị có điều kiện..............................................................................183 6.4.3. Ứng dụng trong kinh tế.........................................................................188 6.5. Bài tập…………………………………………………………..………….196 Chương 7. Phương trình vi phân……………………………………………………………203 7.1. Phương trình vi phân cấp 1.………………………………………………….....203 7.1.1. Các khái niệm………..…..…………………………………………….203 7.1.2. Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến….…………………………203 7.1.3. Phương trình vi phân cấp 1 dạng đẳng cấp….…….….……………..….204 7.1.4. Phương trình vi phân cấp 1 dạng tuyến tính……………………………206 7.1.5. Phương trình vi phân cấp 1 dạng Bernoulli…….………………………208 7.2. Phương trình vi phân cấp 2………….………………………………………….209 7.2.1. Các khái niệm chung……………….……………………………….…209 7.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 có thể giảm cấp được...................................209 7.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng thuần nhất.................211 7 7.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng không thuần nhất.…..212 7.3. Một số ứng dụng trong kinh tế.............................................................................218 7.3.1. Tìm hàm y f(x) = khi biết hệ số co dãn...............................................218 7.3.2. Mô hình cân bằng thị trường với kỳ vọng về giá…………..…………..218 7.4. Bài tập…………………………………………………………....…………….221 Một số đề tham khảo…………………………………………………………….…………..225 Phụ lục 1.Tập số, tổng, tích hữu hạn, hằng đẳng thức, bất đẳng thức, chứng minh bằng phương pháp quy nạp…………………………………………..…………………………………....238 Phụ lục 2.Tập hợp và ánh xạ……………………….……………………………………......241 Phụ lục 3. Tính toán ma trận bằng máy tính cá nhân……………………………………......247 Tài liệu tham khảo…………………………………………………………………………..249 8 LỜI MỞ ĐẦU Các bạn đang có trong tay cuốn “ Giáo trình Toán cao cấp” dành cho sinh viên hệ đại trà, trường đại học Tài chính – Maketing. Đây là giáo trình dành cho sinh viên khối ngành kinh tế và quản trị kinh doanh với thời lượng 4 tín chỉ (60 tiết giảng), được biên soạn dựa trên cuốn sách cùng tên dành cho chương trình CLC; chính vì vậy chúng tôi cố gắng lựa chọn các nội dung căn bản, trọng yếu và có nhiều ứng dụng trong kinh tế và quản trị kinh doanh; nội dung giảng dạy không trùng lặp với nội dung sinh viên đã được trang bị ở chương trình phổ thông; chú trọng ý nghĩa và khả năng áp dụng của kiến thức; giáo trình được biên tập trên cơ sở tham khảo nhiều giáo trình quốc tế cũng như trong nước (xem phần tài liệu tham khảo), cũng như kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm của các tác giả; Nội dung giáo trình, được thiết kế phù hợp với chương trình đào tạo đại học đại trà, và trình độ của sinh viên khối ngành kinh tế và quản trị kinh doanh. Giáo trình bao gồm 7 chương, một số đề tự luyện và một số phụ lục cần thiết. Chương 1. Trình bày về ma trận, phép toán trên ma trận, định thức, ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận, áp dụng vào giải mô hình cân đối liên ngành (Input – Output). Một số ví dụ và bài tập rèn luyện. Chương 2. Trình bày về hệ phương trình tuyến tính và ứng dụng giải mô hình cân bằng thị trường n hàng hóa có liên quan. Một số ví dụ và bài tập rèn luyện Chương 3. Trình bày về không gian vectơ; Một số ví dụ và bài tập rèn luyện. Chương 4. Trình bày về phép tính vi phân hàm một biến : Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân, ứng dụng trong toán học và kinh tế. Một số ví dụ và bài tập rèn luyện. Chương 5. Trình bày về nguyên hàm, tích phân bất định, tích phân xác định, tích phân suy rộng và ứng dụng trong phân tích kinh tế. Một số ví dụ và bài tập rèn luyện. Chương 6. Trình bày về phép tính vi phân hàm nhiều biến : Hàm số nhiều biến; đạo hàm riêng, vi phân toàn phần và ứng dụng trong phân tích kinh tế. Bài toán cực trị tự do 9 và cực trị có điều kiện, phương pháp nhân tử Lagrange; Một số mô hình ứng dụng trong kinh tế; Một số ví dụ và bài tập rèn luyện. Chương 7. Trình bày về phương trình vi phân cấp 1 và phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng và ứng dụng trong phân tích kinh tế; Một số ví dụ và bài tập rèn luyện. Phần cuối, chúng tôi biên soạn một số đề tham khảo để sinh viên có cơ hội thử sức, tự rèn luyện và một số phụ lục khi cần có thể tự tra cứu. Do đối tượng người đọc là sinh viên chuyên ngành kinh tế và quản trị kinh doanh nên chúng tôi không quá đi sâu về lý thuyết mà chủ yếu quan tâm vào ý nghĩa và áp dụng trong kinh tế quản trị kinh doanh của khái niệm và kết quả toán học, chúng tôi cũng sử dụng nhiều ví dụ để người học dễ hiểu, dễ áp dụng, nhưng vẫn đảm bảo sự chặt chẽ và logic của toán học. Giáo trình do Giảng viên cao cấp, TS. Nguyễn Huy Hoàng và ThS. Nguyễn Trung Đông là các giảng viên của Bộ môn Toán – Thống kê, Khoa Kinh tế - Luật, trường đại học Tài chính – Marketing, đã có nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy toán dành cho sinh viên khối ngành kinh tế và quản trị kinh doanh, cùng biên tập. Lần đầu biên soạn, nên giáo trình này không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các độc giả để lần sau giáo trình được hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gởi về địa chỉ email: hoangtoancb@ufm.edu.vn và nguyendong@ufm.edu.vn. Xin trân trọng cảm ơn Thư viện, Trường đại học Tài chính – Marketing đã hỗ trợ và tạo điều kiện cho giáo trình sớm đến tay bạn đọc! Tp. HCM, Tháng 06 năm 2020 Các tác giả 10 MỘT SỐ KÝ HIỆU 1. ∞ : Tập số tự nhiên. 2. ′ : Tập số nguyên. 3. ⁄: Tập số hữu tỉ. 4. ϒ : Tập số thực. 5. ≤ : Tập số phức. 6. M : m n× Tập hợp các ma trận có kích thước cấp (cỡ) m n × . 7. M : n Tập hợp các ma trận vuông cấp n. 8. (i) : Dòng i (hàng i). 9. j c : Cột j. 10. := Phép gán (phép thay thế). 11. : : Đổi chỗ (hoán vị). 12. Det(A) A = : Định thức của ma trận A. 13. I hoặc E : Ma trận đơn vị. 14. r(A) rank(A) = : Hạng của ma trận A. 15. Dim : Số chiều. 16. lim : Giới hạn. 17. i / x i f f x ∂ = ∂ : Đạo hàm riêng của hàm f theo biến i x . 18. L : Sử dụng quy tắc L’hospital. 19. KGVT : Không gian vectơ. 20. Max : Giá trị lớn nhất. 21. Min : Giá trị nhỏ nhất. 11 22. Q : Sản lượng. 23. D : Demand (Cầu). 24. S : Supply (Cung). 25. QD : Lượng cầu. 26. QS : Lượng cung. 27. P : Giá bán. 28. L : Lao động (nhân công). 29. MPL: Hàm sản phẩm cận biên của lao động. 30. K : Vốn. 31. MPK : Hàm sản phẩm cận biên của vốn. 32. π : Lợi nhuận. 33. TR : Tổng doanh thu. 34. MR: Doanh thu biên (doanh thu cận biên). 35. TC : Tổng chi phí. 36. FC : Chi phí cố định. 37. VC : Chi phí biến đổi (chi phí khả biến). 38. MC: Chi phí biên (chi phí cận biên). 39. AC : Chi phí trung bình. 40. TU : Tổng hữu dụng (Hàm lợi ích). 41. MU : Hàm hữu dụng biên (hàm lợi ích biên). 42. Y X E : Hệ số co dãn của Y theo X. 12 Chương 1 MA TRẬN – ĐỊNH THỨC 1.1. Ma trận 1.1.1. Định nghĩa ma trận Một bảng số hình chữ nhật gồm có m dòng (hàng) và n cột được gọi là ma trận có cấp (cỡ) m n. × Ký hiệu: ( ) 11 12 1n 21 22 2n m1 m2 m m n n ij a a a a a a a A a a a × ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ = ⎝ = ⎠ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ (1.1) với i : gọi là chỉ số dòng (hàng). j : gọi là chỉ số cột. ij a : là phần tử nằm ở dòng i và cột j trong ma trận A. Ví dụ 1. Cho các ma trận 1 2 3 A 4 5 6 ⎛ ⎞ = ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận cấp (2 3 . × ) 1 4 B 2 5 3 6 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ = ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận cấp (3 2 . × ) 1 3 2 C 0 1 3 2 4 5 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ = ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận cấp (3 3 × ) (ma trận vuông cấp 3). 1.1.2. Ma trận bằng nhau Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cấp và có tất cả các phần tử tương ứng vị trí bằng nhau. Cho hai ma trận: ( ij)m n A a × = và ( ij)m n B b × = ij ij a b A B i 1,2,...,m; j 1, 2,...,n ⎧ = = ⎨ ⎩∀ = ∀ = ⇔ (1.2) 13 Ví dụ 2. Cho hai ma trận: 1 2 1 b A ; B 3 4 a 4 ⎛ ⎞ ⎛ ⎞ − = = ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ⎝ ⎠ − − . Tìm a, b để hai ma trận A, B bằng nhau. Giải Ta có hai ma trận A và B đều có cấp là (2 2 × ). Do đó a 3 A B . b 2 ⎧ = = ⇔ ⎨ ⎩ = − 1.1.3. Các ma trận đặc biệt 1.1.3.1. Ma trận không Ma trận không là ma trận mà các phần tử đều là số không. Ví dụ 3. Cho các ma trận không 2 3 0 0 0 0 0 0 0 × ⎛ ⎞ = ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trân không cấp (2 3 . × ) 3 2 0 0 0 0 0 0 0 × ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ = ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận không cấp (3 2 . × ) 1.1.3.2. Ma trận vuông Ma trận vuông là ma trận có số hàng và số cột bằng nhau. Ma trận vuông cấp n n × được gọi tắt là ma trận vuông cấp n. Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu là M . n Với ma trận vuông A M , ∈ n các phần tử 11 22 nn a , a ,...,a được gọi là thuộc đường chéo (chính) của ma trận A. Các phần tử n1 n 1,2 1n a ,a ,...,a − được gọi là thuộc đường chéo phụ của ma trận A. Ví dụ 4. Cho ma trận vuông cấp 3: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ có các phần tử 11 22 33 a 1, a 5, a 9 = = = thuộc đường chéo chính còn các phần tử 31 22 13 a 7, a 5, a 3 = = = thuộc đường chéo phụ. 1.1.3.3. Ma trận chéo Ma trận chéo là ma trận vuông mà mọi phần tử không thuộc đường chéo chính đều là bằng 0. Ví dụ 5. Cho ma trận chéo cấp 3 : 1 0 0 0 5 0 . 0 0 9 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ 14 1.1.3.4. Ma trận đơn vị cấp Ma trận đơn vị là ma trận chéo mà mọi phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1. Ký hiệu nI là ma trận đơn vị cấp n. Ví dụ 6. Cho các ma trận đơn vị 2 3 n 1 0 ... 0 1 0 0 1 0 0 1 ... 0 I ; I 0 1 0 ;...;I 0 1 ... ... ... ... 0 0 1 0 0 ... 1 ⎛ ⎞ ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ = = = ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ . 1.1.3.5. Ma trận tam giác trên (dưới) Ma trận tam giác trên (dưới) là ma trận vuông mà các phần tử ở phía dưới (hoặc ở phía trên) đường chéo chính đều bằng 0. Ví dụ 7. Cho các ma trận cấp 3 1 3 4 0 2 5 0 0 3 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận tam giác trên. 1 0 0 3 2 0 5 4 3 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận tam giác dưới. 1.1.3.6. Ma trận bậc thang (ma trận hình thang) Ma trận bậc thang là ma trận ứng với hai dòng bất kỳ số hạng khác không đầu tiên của hàng dưới phải nằm bên phải số hạng khác không đầu tiên của hàng trên. 11 12 1r 1n 22 2r 2n rr rn a a a a 0 a a a 0 0 a a 0 0 0 0 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ Λ Λ Λ Λ Μ Μ Ο Μ Μ Μ Λ Λ Μ Μ Μ Μ Ο Μ Λ Λ với r n < và 11 22 rr a , a ,...,a gọi là các phần tử chéo. Ví dụ 8. Cho ma trận bậc thang như sau: 1 2 3 4 5 0 2 4 3 7 0 0 3 5 4 0 0 0 5 8 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ 15 Lưu ý: Ma trận tam giác trên là ma trận bậc thang đặc biệt. 1.1.3.7. Ma trận chuyển vị Cho ( ij m n )m n A a M , × × = ∈ chuyển vị của A, ký hiệu T A , là ma trận cấp n m× xác định bởi ( ) T ji n m n m A a M . × × = ∈ Nhận xét : Ma trận chuyển vị của A là ma trận nhận được từ A bằng cách chuyển hàng của A thành cột của T A . Tính chất (i) ( ) T T A A, = (ii) ( ) T T T A B A B , + = + (iii) ( ) T T T AB B A . = Định nghĩa: Ma trận vuông A được gọi là một ma trận đối xứng nếu T A A . = Ví dụ 9. Cho ma trận 2 3 4 A 4 5 6 ⎛ ⎞ = ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận cấp (2 3 . × ) Ta có T 2 3 A 3 5 4 6 ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ = ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ là ma trận chuyển vị của ma trận A có cấp là (3 2 . × ) 1.1.4. Các phép toán trên ma trận 1.1.4.1. Nhân một số thực với ma trận Nhân số thức với ma trận là nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận: Cho ma trận ( ij)m n A a × = và ∀ ∈k ϒ ta có: ij m n kA (k a ) = ⋅ × (1.3) Đặc biệt ( ij)m n ( 1)A A a . × − = − = − 1.1.4.2. Cộng hai ma trận cùng cấp Cộng hai ma trận cùng cấp là cộng các phần tử tương ứng các vị trí với nhau: Cho hai ma trận : ( ij)m n A a × = và ( ij)m n B b . × = Ta có